XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, высшая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Клетки доски 20152016 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Во все вершины клеток записаны числа 0 и 1 так, что сумма чисел в вершинах любой черной клетки чётна, а вершинах любой белой — нечётна. Чему может равняться сумма чисел, записанных в четырёх вершинах доски?*

**Ответ**. 0, 2 или 4. **Решение**. Сложив суммы чисел в вершинах всех клеток, получим четное число, так как белых клеток четное число. Поскольку все вершины, кроме угловых, при этом учтены четное число раз, а угловые по разу, сумма чисел в вершинах угловых клеток четна. Значит, она равна 0, 2 или 4. Осталось построить соответствующие примеры. Заметим, что если записать во все вершины клеток на левой и верхней сторонах доски нули и единицы произвольным образом, то дальше, последовательно двигаясь слева направо по строкам, начиная с верхней, можно заполнить числами все вершины с соблюдением условия задачи. Для построения примера с суммой угловых клеток, равной 0, достаточно начать с набора из одних нулей, а для построения двух других примеров заменить в нём единицей нуль в одной или трёх угловых клетках соответственно.

 Доказано только, что сумма чётна: *4 балла*. Только примеры: *4 балла*. Не все примеры, доказательства чётности суммы нет: *0 баллов*.

**2.** *Найдите все натуральные числа n, для которых число 15n+52n+1 является точным квадратом.*

**Ответ**. *n* = 1. **Решение**. 15*n*+52*n*+1 = *m*2 *m*2(5*n*1)2 = 5*n*52*n*+52*n*+1 (*m*5*n*+1)(*m*+5*n*1) = 5*n*+452*n*. Так как разность скобок слева в последнем равенстве не делится на 5, ровно одна из них делится на 5*n*. Рассмотрим два возможных случая. 1) *m*+1 = *k*5*n*. Тогда 5*n*(1+45*n*) = 5*n*(*k*1)((*k*+1)5*n*2) 2*k*1 = (*k*21)5*n*. Тут *k* = 1 не подходит, а при *k*  2 *k*21  2*k*1. 2) *m*1 = *k*5*n*. Тогда 5*n*(1+45*n*) = 5*n*(*k*+1)((*k*1)5*n*+2) 32*k* = (*k*25)5*n*. Тут при *k*  2 правая и левая части имеют разные знаки, а проверка *k* = 2 дает ответ.

**3.** *Мальвина написала на доске 30 различных натуральных чисел от 1 до 2016. Каждый ход Буратино выбирает некоторые из этих чисел и уменьшает их на одно и то же натуральное число, которое может меняться от хода к ходу. За какое наименьшие число ходов Буратино может сделать все числа нулями, вне зависимости от начальных чисел?*

**Ответ**. За 11 ходов. **Решение**. *Оценка*. Пусть Мальвина записала все степени двойки от 1 до 1024 и ещё какие-то 19 чисел. Поскольку порядок ходов неважен, упорядочим их по величине вычитаемых чисел, начиная с наибольшего. Покажем по индукции, что после *k*-го хода на доске есть число, не меньшее   
210*k*. База 0 ходов очевидна. Пусть после *k* ходов на доске есть число, не меньшее 210*k*. Если мы *k*-ым ходом вычитаем число, большее 210*k*1, значит этот и предыдущие ходы не затронули число 210*k*1, и всё доказано. В противном случае не меньше 210*k*1 после вычитания будет число, не меньшее 210*k*. Из доказанного следует, что после 10 ходов на доске ещё останется число, не меньшее 20 = 1, то есть ходов потребуется не меньше 11. *Пример*. Вычитая 210 из всех чисел, не меньших 210, сделаем все числа меньшими 210. Следующим шагом аналогично сделаем все числа меньшими 29 и т.д. После десятого шага все числа станут меньшими 20 = 1, то есть нулями.

 Только оценка или только пример: *4 балла*.

**4.** *Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию abc(a+b+c) = 3. Докажите, что (a+b)(b+c)(c+a)  8.*

**Решение**. (*a+b*)(*b+c*)(*c+a*)  8 (*a+b*)(*b+c*)(*c+a*)+*abc* = (*a+b+c*)(*ab+bc+ca*)  8+*abc* *abc*(*a+b+c*)(*ab+bc+ca*) = 3(*ab+bc+ca*)  8*abc*+(*abc*)2. Заметим, что 3 = *abc*(*a+b+c*)  3(*abc*)4/3, откуда *abc*  1. Поэтому 8*abc*+(*abc*)2  9. С другой стороны, (*ab+bc+ca*)2 = *a*2*b*2+*b*2*c*2+*a*2*c*2+2*abc*(*a+b+c*). Заметим, что *a*2*b*2+*b*2*c*2+*a*2*c*2 = (*a*2*b*2+*b*2*c*2)/2+(*b*2*c*2+*a*2*c*2)/2+(*a*2*b*2+*a*2*c*2)/2  *ab*2*c*+*bc*2*a*+*ca*2*b* = *abc*(*a+b+c*). Таким образом, (*ab+bc+ca*)2  3*abc*(*a+b+c*) = 9, откуда 3(*ab+bc+ca*)  33  8*abc*+(*abc*)2, что и завершает доказательство.

**5.** *У Павиана и Бабуина есть n  5000 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 16 бананов. При каких n Павиан может победить?*

**Ответ**. При *n* = 3*k* и *n* = 3*k*+1. **Решение**. *Пусть n при делении на 3 дает остатки 0 или 1.* Первым ходом Павиан съедает один банан. Бабуин вынужден съесть 2 банана. Затем Павиан снова ест один банан и т.д. После каждой пары таких ходов количество бананов уменьшается на 3, и рано или поздно станет равным либо делящемуся на 3 числу 2016, либо числу 16, дающему при делении на 3 остаток 1. *Пусть n при делении на 3 дает остаток 2.* Тогда Бабуин всегда ест на один банан больше, чем Павиан на предыдущем ходу, пока не окажется, что очередной такой ход приводит к поражению. Если Павиан всё время ел по одному банану, такого не случится, потому что после хода Бабуина число бананов всегда будет давать при делении на 3 остаток 2. Значит, Павиан в какой-то момент съел больше одного банана, и дальше тоже всё время ел больше одного банана. Поэтому у Бабуина в момент опасности есть возможность съесть на один банан меньше, чем Павиан предыдущим ходом. Если после этого осталось 18 бананов, Бабуин с Павианом двумя следующими ходами вместе съедят не меньше 3 бананов, и Бабуин не проиграет. Если же осталось 2018 бананов, то тактика 1-2-1-2-… приведет Павиана к поражению, потому что 16 не дает при делении на 3 остатка 2, а если Павиан каким-то ходом съест больше одного банана, Бабуин не даст ему выиграть уже описанным выше способом.

 Только случаи 3*k* и 3*k*+1: *4 балла*.

**6.** *В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Точки M и N — середины отрезков AD и BC, P — произвольная точка на отрезке MN. Прямая, проходящая через P параллельно BC, пересекает CA и AB в точках K и H. Прямые, проходящие через точку P параллельно AC и AB, пересекают отрезок BC в точках T и S. Докажите, что трапеция HKTS является равнобокой.*

**Решение**. Пусть *U* и *V* — середины отрезков *HK* и *ST*. Тогда отрезок *UV* соединяет середины оснований трапеции *HKTS*, и для решения задачи достаточно доказать, что *UV*  *ST*, то есть что *UV* || *AD*. Заметим, что точки *A*, *U*, *N* лежат на одной прямой, так как медиана *AN* делит пополам любой *HK*, параллельный *AB*. Кроме того, *PV* || *AN*, так как это медианы в треугольниках *BAC* и *SPT* с соответственно параллельными сторонами. Далее, рассмотрим такую точку *E*, что *ANDE* — параллелограмм. Тогда точка *M* является серединой его диагонали *AD*, поэтому точки *N*, *P*, *M*, *E* лежат на одной прямой. В итоге на диагонали *EN* параллелограмма есть точка *P*, через которую проведены прямые *PU* и *PV*, параллельные *EA* и *ED*. Тогда треугольники *PUV* и *EAD* гомотетичны с центром в точке *N*. Следовательно, *UV* || *AD*, что мы и хотели доказать.

 Неразбор случаев (при условии, что хотя бы один существенный случай разобран): *дыра в 2 балла*.

**7.** *Пусть D, E, F — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно; I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Прямые BI и ED пересекаются в точке P, прямые CI и FD пересекаются в точке Q. Прямая PQ пересекает стороны AB и AC в точках T и S соответственно. Докажите, что треугольник ATS равнобедренный.*

**Решение**. Заметим, что *DQC* = *ACQ* = *QCD* (мы воспользовались тем, что *FD* || *AC*), откуда *QD* = *DC*. Аналогично, *PD* = *DB*. Так как *DC* = *DB*, то *QD* = *DP*. В равнобедренном треугольнике *QDP* биссектриса является высотой. Так как в параллелограмме *FAED* биссектрисы противоположных углов *FAE* и *EDF* параллельны, в треугольнике *SAT* биссектриса угла *A* также является высотой, то есть этот треугольник — равнобедренный.

**8.** *В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?*

**Ответ**. 9. **Решение**. *Оценка*. Взяв общего знакомого двух знакомых, получим треугольник. У каждого из этих троих есть ещё по два знакомых, незнакомых с двумя остальными, что и даёт оценку. *Пример*. 9 человек, пронумерованных от 1 до 9, и такие треугольники знакомств: 123, 145, 267, 389, 468, 579.

 Только оценка или только пример: *4 балла*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, первая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Клетки доски 20152016 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Во все вершины клеток записаны числа 0 и 1 так, что сумма чисел в вершинах любой черной клетки чётна, а вершинах любой белой — нечётна. Чему может равняться сумма чисел, записанных в четырёх вершинах доски?*

**Ответ**. 0, 2 или 4. **Решение**. Сложив суммы чисел в вершинах всех клеток, получим четное число, так как белых клеток четное число. Поскольку все вершины, кроме угловых, при этом учтены четное число раз, а угловые по разу, сумма чисел в вершинах угловых клеток четна. Значит, она равна 0, 2 или 4. Осталось построить соответствующие примеры. Заметим, что если записать во все вершины клеток на левой и верхней сторонах доски нули и единицы произвольным образом, то дальше, последовательно двигаясь слева направо по строкам, начиная с верхней, можно заполнить числами все вершины с соблюдением условия задачи. Для построения примера с суммой угловых клеток, равной 0, достаточно начать с набора из одних нулей, а для построения двух других примеров заменить в нём единицей нуль в одной или трёх угловых клетках соответственно.

 Доказано только, что сумма чётна: *4 балла*. Только примеры: *4 балла*. Не все примеры, доказательства чётности суммы нет: *0 баллов*.

**2.** *Найдите все натуральные числа n, для которых число 15n+52n+1 является точным квадратом.*

**Ответ**. *n* = 1. **Решение**. 15*n*+52*n*+1 = *m*2 *m*2(5*n*1)2 = 5*n*52*n*+52*n*+1 (*m*5*n*+1)(*m*+5*n*1) = 5*n*+452*n*. Так как разность скобок слева в последнем равенстве не делится на 5, ровно одна из них делится на 5*n*. Рассмотрим два возможных случая. 1) *m*+1 = *k*5*n*. Тогда 5*n*(1+45*n*) = 5*n*(*k*1)((*k*+1)5*n*2) 2*k*1 = (*k*21)5*n*. Тут *k* = 1 не подходит, а при *k*  2 *k*21  2*k*1. 2) *m*1 = *k*5*n*. Тогда 5*n*(1+45*n*) = 5*n*(*k*+1)((*k*1)5*n*+2) 32*k* = (*k*25)5*n*. Тут при *k*  2 правая и левая части имеют разные знаки, а проверка *k* = 2 дает ответ.

**3.** *Мальвина написала на доске числа 1, 2, …, 30. Каждый ход Буратино выбирает некоторые из этих чисел и уменьшает их на одно и то же натуральное число, которое может меняться от хода к ходу. За какое наименьшие число ходов Буратино может сделать все числа нулями?*

**Ответ**. За 5 ходов. **Решение**. *Оценка*. Каждое из чисел от 1 до 30 превращает в 0 своя комбинация вычитаний, и все эти комбинации различны. Если ходов было меньше пяти, то комбинаций вычитаний было не больше 24 = 16. *Пример*. Вычитая 24 = 16 из всех чисел, не меньших 16, сделаем все числа меньшими 16. Следующим шагом аналогично сделаем все числа меньшими 8 и т.д. После пятого шага все числа станут меньшими 20 = 1, то есть нулями.

 Только оценка или только пример: *4 балла*.

**4.** *Действительные числа a, b, c, d таковы, что a+b = cd и c+d = ab. Докажите неравенство (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)  0.*

**Решение**. (*a*+1)(*b*+1) = *ab*+*a*+*b*+1 = *a+b+c+d*+1. Аналогично, (*c*+1)(*d*+1) = *a+b+c+d*+1. Поэтому (*a*+1)(*b*+1)(*c*+1)(*d*+1) = (*a+b+c+d*+1)2  0.

**5.** *У Павиана и Бабуина есть n  5000 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 16 бананов. При каких n Павиан может победить?*

**Ответ**. При *n* = 3*k* и *n* = 3*k*+1. **Решение**. *Пусть n при делении на 3 дает остатки 0 или 1.* Первым ходом Павиан съедает один банан. Бабуин вынужден съесть 2 банана. Затем Павиан снова ест один банан и т.д. После каждой пары таких ходов количество бананов уменьшается на 3, и рано или поздно станет равным либо делящемуся на 3 числу 2016, либо числу 16, дающему при делении на 3 остаток 1. *Пусть n при делении на 3 дает остаток 2.* Тогда Бабуин всегда ест на один банан больше, чем Павиан на предыдущем ходу, пока не окажется, что очередной такой ход приводит к поражению. Если Павиан всё время ел по одному банану, такого не случится, потому что после хода Бабуина число бананов всегда будет давать при делении на 3 остаток 2. Значит, Павиан в какой-то момент съел больше одного банана, и дальше тоже всё время ел больше одного банана. Поэтому у Бабуина в момент опасности есть возможность съесть на один банан меньше, чем Павиан предыдущим ходом. Если после этого осталось 18 бананов, Бабуин с Павианом двумя следующими ходами вместе съедят не меньше 3 бананов, и Бабуин не проиграет. Если же осталось 2018 бананов, то тактика 1-2-1-2-… приведет Павиана к поражению, потому что 16 не дает при делении на 3 остатка 2, а если Павиан каким-то ходом съест больше одного банана, Бабуин не даст ему выиграть уже описанным выше способом.

 Только случаи 3*k* и 3*k*+1: *4 балла*.

**6.** *В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Точки M и N — середины отрезков AD и BC, P — произвольная точка на отрезке MN. Прямая, проходящая через P параллельно BC, пересекает CA и AB в точках K и H. Прямые, проходящие через точку P параллельно AC и AB, пересекают отрезок BC в точках T и S. Докажите, что трапеция HKTS является равнобокой.*

**Решение**. Пусть *U* и *V* — середины отрезков *HK* и *ST*. Тогда отрезок *UV* соединяет середины оснований трапеции *HKTS*, и для решения задачи достаточно доказать, что *UV*  *ST*, то есть что *UV* || *AD*. Заметим, что точки *A*, *U*, *N* лежат на одной прямой, так как медиана *AN* делит пополам любой *HK*, параллельный *AB*. Кроме того, *PV* || *AN*, так как это медианы в треугольниках *BAC* и *SPT* с соответственно параллельными сторонами. Далее, рассмотрим такую точку *E*, что *ANDE* — параллелограмм. Тогда точка *M* является серединой его диагонали *AD*, поэтому точки *N*, *P*, *M*, *E* лежат на одной прямой. В итоге на диагонали *EN* параллелограмма есть точка *P*, через которую проведены прямые *PU* и *PV*, параллельные *EA* и *ED*. Тогда треугольники *PUV* и *EAD* гомотетичны с центром в точке *N*. Следовательно, *UV* || *AD*, что мы и хотели доказать.

 Неразбор случаев (при условии, что хотя бы один существенный случай разобран): *дыра в 2 балла*.

**7.** *Пусть D, E, F — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно; I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Прямые BI и ED пересекаются в точке P, прямые CI и FD пересекаются в точке Q. Прямая PQ пересекает стороны AB и AC в точках T и S соответственно. Докажите, что треугольник ATS равнобедренный.*

**Решение**. Заметим, что *DQC* = *ACQ* = *QCD* (мы воспользовались тем, что *FD* || *AC*), откуда *QD* = *DC*. Аналогично, *PD* = *DB*. Так как *DC* = *DB*, то *QD* = *DP*. В равнобедренном треугольнике *QDP* биссектриса является высотой. Так как в параллелограмме *FAED* биссектрисы противоположных углов *FAE* и *EDF* параллельны, в треугольнике *SAT* биссектриса угла *A* также является высотой, то есть этот треугольник — равнобедренный.

**8.** *В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?*

**Ответ**. 9. **Решение**. *Оценка*. Взяв общего знакомого двух знакомых, получим треугольник. У каждого из этих троих есть ещё по два знакомых, незнакомых с двумя остальными, что и даёт оценку. *Пример*. 9 человек, пронумерованных от 1 до 9, и такие треугольники знакомств: 123, 145, 267, 389, 468, 579.

 Только оценка или только пример: *4 балла*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, вторая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Клетки доски 56 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Во все вершины клеток записаны числа 0 и 1 так, что сумма чисел в вершинах любой черной клетки чётна, а вершинах любой белой — нечётна. Чему может равняться сумма чисел, записанных в четырёх вершинах доски?*

**Ответ**. 1 или 3. **Решение**. Сложив суммы чисел в вершинах всех клеток, получим нечётное число, так как белых клеток нечетное число. Поскольку все вершины, кроме угловых, при этом учтены четное число раз, а угловые по разу, сумма чисел в вершинах угловых клеток нечетна. Значит, она равна 1 или 3. Заметим, что если есть пример расстановки нулей и единиц, где сумма равна 1, то заменой всех нулей на единицы и наоборот получается пример, где сумма равна 3. Поэтому достаточно доказать, что существует хотя бы один пример расстановки. Для этого запишем во все вершины клеток на левой и верхней сторонах доски по единице, а потом будем с соблюдением условия задачи добавлять по одному числу в свободные вершины клеток, где три вершины уже заполнены. Последовательно двигаясь слева направо по строкам, начиная с верхней, мы заполним числами все вершины.

 Доказано только, что сумма нечётна: *4 балла*. Только примеры: *4 балла*. Только один из двух примеров: *2 балла*.

**2.** *Дано четырёхзначное число A, в записи которого нет нулей и девяток. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число B. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число C. Могло ли оказаться, что CB = A?*

**Ответ**. Могло. **Решение**. *A* = 6174.

**3.** *Мальвина написала на доске числа 1, 2, …, 30. Каждый ход Буратино выбирает некоторые из этих чисел и уменьшает их на одно и то же натуральное число, которое может меняться от хода к ходу. За какое наименьшие число ходов Буратино может сделать все числа нулями?*

**Ответ**. За 5 ходов. **Решение**. *Оценка*. Каждое из чисел от 1 до 30 превращает в 0 своя комбинация вычитания, и все эти комбинации различны. Если ходов было меньше пяти, то комбинаций вычитаний было меньше 24 = 16. *Пример*. Вычитая 24 = 16 из всех чисел, не меньших 16, сделаем все числа меньшими 16. Следующим шагом аналогично сделаем все числа меньшими 8 и т.д. После пятого шага все числа станут меньшими 20 = 1, то есть нулями.

 Только оценка: *6 баллов*. Только пример: *4 балла*.

**4.** *Действительные числа a, b, c, d таковы, что a+b = cd и c+d = ab. Докажите неравенство (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)  0.*

**Решение**. (*a*+1)(*b*+1) = *ab*+*a*+*b*+1 = *a+b+c+d*+1. Аналогично, (*c*+1)(*d*+1) = *a+b+c+d*+1. Поэтому (*a*+1)(*b*+1)(*c*+1)(*d*+1) = (*a+b+c+d*+1)2  0.

**5.** *У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить?*

**Ответ**. Может. **Решение**. Первым ходом Павиан съедает один банан. Бабуин вынужден съесть 2 банана. Затем Павиан снова ест один банан и т.д., пока после очередного хода Бабуина не останется 2023 банана. Это случится, потому что 30162023 = 993 делится на 3. Тогда Павиан следующим ходом съедает 3 банана. Бабуин не может после этого съесть 4 банана, потому что тогда останется 2016 бананов. Поэтому он вынужден съесть 2 банана. После этого Павиан возвращается к прежней схеме, когда он своим ходом съедает 1 банан, а Бабуин вынужден каждым ходом съедать по 2 банана. Так как 20181016 = 1002 делится на 3, через 1002/3 = 334 пары таких ходов после хода Бабуина останется ровно 1016 бананов.

**6.** *Пусть AM медиана треугольника ABC, N точка на стороне AB. Отрезки AM и CN пересекаются в точке K. Оказалось, что BNC = 2BAM. Докажите, что AB = CK.*

**Решение**. По теореме о внешнем угле треугольника *NAK* = *NKA*. Рассмотрим такую точку *D*, что *BACD* — параллелограмм. Тогда *KDC* = *NAK* = *NKA* = *MKC*, откуда *CK* = *CD*. Осталось заметить, что *CD* = *AB*.

**7.** *Пусть D, E, F — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно; I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Прямые BI и ED пересекаются в точке P, прямые CI и FD пересекаются в точке Q. Прямая PQ пересекает стороны AB и AC в точках T и S соответственно. Докажите, что треугольник ATS равнобедренный.*

**Решение**. Заметим, что *DQC* = *ACQ* = *QCD* (мы воспользовались тем, что *FD* || *AC*), откуда *QD* = *DC*. Аналогично, *PD* = *DB*. Так как *DC* = *DB*, то *QD* = *DP*. В равнобедренном треугольнике *QDP* биссектриса является высотой. Так как в параллелограмме *FAED* биссектрисы противоположных углов *FAE* и *EDF* параллельны, в треугольнике *SAT* биссектриса угла *A* также является высотой, то есть этот треугольник — равнобедренный.

**8.** *В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?*

**Ответ**. 9. **Решение**. *Оценка*. Взяв общего знакомого двух знакомых, получим треугольник. У каждого из этих троих есть ещё по два знакомых, незнакомых с двумя остальными, что и даёт оценку. *Пример*. 9 человек, пронумерованных от 1 до 9, и такие треугольники знакомств: 123, 145, 267, 389, 468, 579.

 Только оценка или только пример: *4 балла*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, высшая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Дано натуральное число n. Назовем клетчатый прямоугольник* ***большúм****, если каждая из его сторон больше 100n. При каком наименьшем k из любого большого прямоугольника можно вырезать несколько полосок 12n так, чтобы осталось не более k клеток?*

**Ответ**. *n*2. **Решение**. *Оценка*. Раскрасим квадрат со стороной 101*n* в два цвета шахматной раскраской с размером клетки *nn*. В каждой полоске 12*n*, расположенной в таком квадрате, будет поровну чёрных и белых клеток, и при этом клеток одного из цветов будет на *n*2 больше, чем клеток другого. *Пример*. Поделим стороны *a* и *b* большого прямоугольника (БП) на 2*n* с остатком: *a* = 2*cn+d*, *b* = 2*en+f*. Рассмотрим два возможных случая. 1) *df*  *n*2. Выделим в углу БП прямоугольник со сторонам *d* (на стороне длины *a*) и *f*. Оставшаяся часть БП без труда режется на полоски 12*n*. 2) *df* > *n*2. Тогда   
(2*nd*)(2*nf*) < *n*2. Выделим в углу БП прямоугольник *П* со сторонам 2*n+d* (на стороне длины *a*) и 2*n+f*. Оставшаяся часть БП без труда режется на полоски 12*n*. В прямоугольнике *П* разместим прямоугольник *П*1, верхняя и нижняя стороны которого отстоят на *d*, а правая и левая на *f* от соответствующих сторон прямоугольника *П*. Стороны *П*1 равны 2*nd* и 2*nf* соответственно, то есть в нем менее *n*2 клеточек, а оставшаяся часть прямоугольника *П* режется на полоски 12*n*, образующие два прямоугольника со сторонами 2*n* и *d* и два прямоугольника со сторонами 2*n* и *f*.

 Только ответ: *0 баллов*. Только оценка: *4 балла*. Только пример разбиения в случае *df*  *n*2: *0 баллов*. Все примеры разбиений: *4 балла*.

**2.** *У Павиана и Бабуина есть n  5000 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 16 бананов. При каких n Павиан может победить?*

**Ответ**. При *n* = 3*k* и *n* = 3*k*+1. **Решение**. *Пусть n при делении на 3 дает остатки 0 или 1.* Первым ходом Павиан съедает один банан. Бабуин вынужден съесть 2 банана. Затем Павиан снова ест один банан и т.д. После каждой пары таких ходов количество бананов уменьшается на 3, и рано или поздно станет равным либо делящемуся на 3 числу 2016, либо числу 16, дающему при делении на 3 остаток 1. *Пусть n при делении на 3 дает остаток 2.* Тогда Бабуин всегда ест на один банан больше, чем Павиан на предыдущем ходу, пока не окажется, что очередной такой ход приводит к поражению. Если Павиан всё время ел по одному банану, такого не случится, потому что после хода Бабуина число бананов всегда будет давать при делении на 3 остаток 2. Значит, Павиан в какой-то момент съел больше одного банана, и дальше тоже всё время ел больше одного банана. Поэтому у Бабуина в момент опасности есть возможность съесть на один банан меньше, чем Павиан предыдущим ходом. Если после этого осталось 18 бананов, Бабуин с Павианом двумя следующими ходами вместе съедят не меньше 3 бананов, и Бабуин не проиграет. Если же осталось 2018 бананов, то тактика 1-2-1-2-… приведет Павиана к поражению, потому что 16 не дает при делении на 3 остатка 2, а если Павиан каким-то ходом съест больше одного банана, Бабуин не даст ему выиграть уже описанным выше способом.

Только случаи остатков 0 и 1: *2 балла*.

**3.** *Кирилл написал на заборе в строчку число 21 четное число раз. Докажите, что полученное число 212121…21 не является точным квадратом.*

**Решение**. Заметим, что . Нетрудно проверить, что число 102*k*+1 взаимно просто с числами 3, 7, 11 и 102*k*1. Поэтому оно должно быть точным квадратом, если 21…21 точный квадрат. Но 102*k*+1 лишь на 1 отличается от точного квадрата 102*k*.

**4.** *Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c удовлетворяют условию ab = ac+bc. Докажите, что abc точный квадрат.*

**Решение**. Пусть *p* простое число, входящее в разложение *a* на простые множители в степени *k*. Тогда *bc* делится на *pk*. Так как числа *a*, *b* и *c* взаимно просты в совокупности, на *pk* должно делиться ровно одно из чисел *b* и *c*. При этом *b* не делится на *pk*+1: иначе на *pk*+1 делилось бы *ac*. Таким образом, все простые множители числа *a* входят в разложение произведения *abc* на простые множители в чётных степенях. Для простых множителей чисел *b* и *c* доказательство аналогично.

**5.** *В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад.*

**Решение**. Возьмём любую олимпиаду *O*. Для каждой их оставшихся 43 олимпиад один из семи победителей олимпиады *O* стал и её победителем. Значит, среди победителей олимпиады *O* был такой победитель *П*, который стал победителем еще по крайней мере семи олимпиад *O*1, …, *O*7. Допустим, если олимпиада *O*8, где *П* не был победителем. Тогда для каждой из олимпиад *O*, *O*1, …, *O*7 один из семи победителей олимпиады *O*8 был и её победителем. Но тогда один из победителей олимпиады *O*8 был, наряду с *П*, победителем каких-то двух из олимпиад *O*, *O*1, …, *O*7, что противоречит условию задачи.

**6.** *На экране компьютера написаны 50 натуральных чисел от 1 до 1000. За одну операцию юзер Вася может указать* ***целое*** *число n, выбрать несколько из написанных на экране чисел и прибавить n к выбранным числам. Докажите, что за 10 таких операций Вася может сделать все числа нулями, вне зависимости от исходных чисел.*

**Решение**. Вычитая 29 = 512 из всех чисел, не меньших 512, сделаем все числа меньшими 512. Следующим шагом аналогично сделаем все числа меньшими 28 и т.д. После десятого шага все числа станут меньшими 20 = 1, то есть нулями.

**7.** *Среди чисел a, b, c и d два положительных и два отрицательных. Докажите, что   
|x–a|+|x–b|+|x–c|+|x–d|  |a|+|b|+|c|+|d| при любом x.*

**Решение**. Достаточно доказать, что если числа *a* и *b* имеют разные знаки, то *|xa|+|xb|  |a|+|b|* при любом *x*. Пусть *a* < 0 < *b*. Если *x*  *a*, имеем *|xa|+|xb|* = *x+ax+b* = |*x*||*a*|+|*x*|+*b*  *|a|+|b|*. Если *a*< *x*  *b*, имеем *|xa|+|xb|* = *xax+b* = *|a|+|b|*. Если *x* > *b*, имеем *|xa|+|xb|* > *x+*|*a*| > |*b|+|a|*.

**8.** *Дан треугольник ABC. Известно, что B = 3C. На стороне AC отмечены такие точки M и N, что ABM = MBN = NBC. Перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BN, пересекает отрезок BM в точке K. Докажите, что NK биссектриса угла ANB.*

**Решение**. Пусть *C* = . Тогда *ANB* = *C*+*NBC* = 2 = *ABN*. Значит, *AK* биссектриса угла *A*. Кроме того, *BM* биссектриса угла *ABN*. Значит, *K* точка пересечения биссектрис треугольника *ABN*. из чего и следует утверждение задачи.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, первая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Назовем клетчатый прямоугольник* ***большúм****, если каждая из его сторон больше 100. При каком наименьшем k из любого большого прямоугольника можно вырезать несколько полосок 16 так, чтобы осталось не более k клеток?*

**Ответ**. 9. **Решение**. *Оценка*. Раскрасим квадрат со стороной 102 в два цвета шахматной раскраской с размером клетки 33. В каждой полоске 16, расположенной в таком квадрате, будет поровну чёрных и белых клеток, и при этом клеток одного из цветов будет на 32 = 9 больше, чем клеток другого. *Пример*. Поделим стороны *a* и *b* большого прямоугольника (БП) на 6 с остатком: *a* = 6*c+d*, *b* = 6*e+f*. Рассмотрим два возможных случая. 1) *df*  9. Выделим в углу БП прямоугольник со сторонам *d* (на стороне длины *a*) и *f*. Оставшаяся часть БП без труда режется на полоски 16. 2) *df* > 9. Тогда (6*d*)(6*f*) < 9. Выделим в углу БП прямоугольник *П* со сторонам 6*+d* (на стороне длины *a*) и 6*+f*. Оставшаяся часть БП без труда режется на полоски 16. В прямоугольнике *П* разместим прямоугольник *П*1, верхняя и нижняя стороны которого отстоят на *d*, а правая и левая на *f* от соответствующих сторон прямоугольника *П*. Стороны *П*1 равны 6*d* и 6*f* соответственно, то есть в нем меньше 9 клеточек, а оставшаяся часть прямоугольника *П* режется на полоски 16, образующие два прямоугольника со сторонами 6 и *d* и два прямоугольника со сторонами 6 и *f*.

 Только ответ: *0 баллов*. Только оценка: *4 балла*. Только пример разбиения в случае *df*  9: *0 баллов*. Все примеры разбиений: *4 балла*.

**2.** *У Павиана и Бабуина есть n  5000 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. При каких n Павиан может победить?*

**Ответ**. При любых. **Решение**. *Пусть n при делении на 3 дает остатки 0 или 2.* Первым ходом Павиан съедает один банан. Бабуин вынужден съесть 2 банана. Затем Павиан снова ест один банан и т.д. После каждой пары таких ходов количество бананов уменьшается на 3, и рано или поздно станет равным либо делящемуся на 3 числу 2016, либо числу 1016, дающему при делении на 3 остаток 2. *Пусть n при делении на 3 дает остаток 1.* Тогда Павиан придерживается описанной выше стратегии, пока после очередного хода Бабуина не останется 2023 банана. Тогда Павиан следующим ходом съедает 3 банана. Бабуин не может после этого съесть 4 банана, потому что тогда останется 2016 бананов. Поэтому он вынужден съесть 2 банана. После этого Павиан возвращается к прежней схеме, когда он своим ходом съедает 1 банан, а Бабуин вынужден каждым ходом съедать по 2 банана. Так как 20181016 = 1002 делится на 3, через 1002/3 = 334 пары таких ходов после хода Бабуина останется ровно 1016 бананов.

Только случаи остатков 0 и 2: *2 балла*.

**3.** *Кирилл написал на заборе в строчку 120 раз число 21. Докажите, что полученное число 212121…21 не является точным квадратом.*

**Решение**. 21…21 = 2110…10 = 21101100010001…10001, где в последнем сомножителе 60 единиц, то есть он равен 1+104+108+…+10460 (\*). Так как 104 дает при делении на 101 остаток 1, сумма (\*) дает при делении на 101 остаток 60. Значит, число 21…21 делится на 101 и не делится на 1012.

**4.** *Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c удовлетворяют условию ab = ac+bc. Докажите, что abc точный квадрат.*

**Решение**. Пусть *p* простое число, входящее в разложение *a* на простые множители в степени *k*. Тогда *bc* делится на *pk*. Так как числа *a*, *b* и *c* взаимно просты в совокупности, на *pk* должно делиться ровно одно из чисел *b* и *c*. При этом *b* не делится на *pk*+1: иначе на *pk*+1 делилось бы *ac*. Таким образом, все простые множители числа *a* входят в разложение произведения *abc* на простые множители в чётных степенях. Для простых множителей чисел *b* и *c* доказательство аналогично.

**5.** *В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад.*

**Решение**. Возьмём любую олимпиаду *O*. Для каждой их оставшихся 43 олимпиад один из семи победителей олимпиады *O* стал и её победителем. Значит, среди победителей олимпиады *O* был такой победитель *П*, который стал победителем еще по крайней мере семи олимпиад *O*1, …, *O*7. Допустим, если олимпиада *O*8, где *П* не был победителем. Тогда для каждой из олимпиад *O*, *O*1, …, *O*7 один из семи победителей олимпиады *O*8 был и её победителем. Но тогда один из победителей олимпиады *O*8 был, наряду с *П*, победителем каких-то двух из олимпиад *O*, *O*1, …, *O*7, что противоречит условию задачи.

**6.** *На экране компьютера написаны 50 натуральных чисел от 1 до 1000. За одну операцию юзер Вася может указать* ***целое*** *число n, выбрать несколько из написанных на экране чисел и прибавить n к выбранным числам. Докажите, что за 10 таких операций Вася может сделать все числа нулями, вне зависимости от исходных чисел.*

**Решение**. Вычитая 29 = 512 из всех чисел, не меньших 512, сделаем все числа меньшими 512. Следующим шагом аналогично сделаем все числа меньшими 28 и т.д. После десятого шага все числа станут меньшими 20 = 1, то есть нулями.

**7.** *Среди чисел a, b, c и d два положительных и два отрицательных. Докажите, что   
|x–a|+|x–b|+|x–c|+|x–d|  |a|+|b|+|c|+|d| при любом x.*

**Решение**. Достаточно доказать, что если числа *a* и *b* имеют разные знаки, то *|xa|+|xb|  |a|+|b|* при любом *x*. Пусть *a* < 0 < *b*. Если *x*  *a*, имеем *|xa|+|xb|* = *x+ax+b* = |*x*||*a*|+|*x*|+*b*  *|a|+|b|*. Если *a*< *x*  *b*, имеем *|xa|+|xb|* = *xax+b* = *|a|+|b|*. Если *x* > *b*, имеем *|xa|+|xb|* > *x+*|*a*| > |*b|+|a|*.

**8.** *Дан треугольник ABC. Известно, что B = 3C. На стороне AC отмечены такие точки M и N, что ABM = MBN = NBC. Перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BN, пересекает отрезок BM в точке K. Докажите, что NK биссектриса угла ANB.*

**Решение**. Пусть *C* = . Тогда *ANB* = *C*+*NBC* = 2 = *ABN*. Значит, *AK* биссектриса угла *A*. Кроме того, *BM* биссектриса угла *ABN*. Значит, *K* точка пересечения биссектрис треугольника *ABN*. из чего и следует утверждение задачи.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, вторая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Дан квадрат со стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать не более 4 клеток таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 14.*

**Решение**. Рассмотрим несколько случаев. Если сторона квадрата делится на 4, все очевидно. *Если сторона квадрата равна 4k+2*, вырежем угловой квадрат 22. Оставшуюся часть квадрата можно разрезать на два прямоугольника 24*k* и квадрат со стороной 4*k*, которые в свою очередь очевидным образом режутся на прямоугольники 14. У *квадрата со стороной 4k+1* достаточно вырезать угловую клетку: оставшуюся часть можно разрезать на квадрат со стороной 4*k* и две полоски 14*k*, которые без труда режутся на прямоугольники 14. В *квадрате со стороной 4k+3* выделим угловой квадрат 77 и вырежем в нем центральную клетку. Оставшуюся часть квадрата 77 нетрудно разрезать на четыре прямоугольника 43, а оставшаяся часть квадрата со стороной 4*k*+3 режется на квадрат со стороной 4*k*4 и два прямоугольника 7(4*k*4), легко режущиеся на прямоугольники 14.

 Только случаи 4*k*+1 и 4*k*+2: *2 балла*.

**2.** *У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить?*

**Ответ**. Может. **Решение**. Первым ходом Павиан съедает один банан. Бабуин вынужден съесть 2 банана. Затем Павиан снова ест один банан и т.д., пока после очередного хода Бабуина не останется 2023 банана. Это случится, потому что 30162023 = 993 делится на 3. Тогда Павиан следующим ходом съедает 3 банана. Бабуин не может после этого съесть 4 банана, потому что тогда останется 2016 бананов. Поэтому он вынужден съесть 2 банана. После этого Павиан возвращается к прежней схеме, когда он своим ходом съедает 1 банан, а Бабуин вынужден каждым ходом съедать по 2 банана. Так как 20181016 = 1002 делится на 3, через 1002/3 = 334 пары таких ходов после хода Бабуина останется ровно 1016 бананов.

**3.** *Кирилл написал на заборе в строчку число 721 ровно 721 раз. Докажите, что полученное число 721721721…721 не является квадратом натурального числа.*

**Решение**. 721…721 = 71031001001…1001, где в последнем сомножителе 721 единица. Заметим, что число 1001001…1001 = 107203+1001(107183+107163+…+1) не делится на 7, так как 1001 делится на 7, а 107203 нет. Значит, число из условия задачи делится на 7, но не делится на 72.

**4.** *Незнайка похвастался, что смог составить четыре натуральных числа, первое из которых делится на 36, второе на 37, третье на 38, а четвёртое на 39. При этом цифра 0 в записи чисел не содержится, а цифры 1, 2, …, 9 использованы ровно по одному разу. Не ошибся ли он?*

**Ответ**. Ошибся. **Решение**. Так как всего в этих четырёх числах 9 цифр, три из этих чисел должны быть двухзначными. Каждое из этих трёх равно либо одному из чисел 36, 37, 38, 39, либо одному из чисел 72, 74, 76, 78. Но тогда среди них найдутся два, начинающиеся на одну и ту же цифру.

**5.** *В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно двух общих знакомых. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?*

**Ответ**. 6. **Решение**. *Пример*. Вершины и рёбра октаэдра. *Оценка*. Очевидно, что людей в группе не меньше пяти. Но если их ровно пять и каждый знает четверых, то каждый знает каждого, и у каждых двоих три общих знакомых.

 Только оценка или только пример: *4 балла*.

**6.** *На экране компьютера написаны 50 натуральных чисел от 1 до 1000. За одну операцию юзер Вася может указать* ***целое*** *число n, выбрать несколько из написанных на экране чисел и прибавить n к выбранным числам. Докажите, что за 10 таких операций Вася может сделать все числа нулями, вне зависимости от исходных чисел.*

**Решение**. Вычитая 29 = 512 из всех чисел, не меньших 512, сделаем все числа меньшими 512. Следующим шагом аналогично сделаем все числа меньшими 28 и т.д. После десятого шага все числа станут меньшими 20 = 1, то есть нулями.

**7.** *Числа a и b имеют разные знаки. Докажите, что |x+a|+|x+b|  |a|+|b| при любом x.*

**Решение**. Пусть *a* < 0 < *b*. Если *x*  *b*, имеем *|x+a|+|x+b|* = *xaxb* = |*x*|+|*a*|+(|*x*|*b*)  *|a|+|b|*. Если *b*< *x*  *a*, имеем *|x+a|+|x+b|* = *xa+x+b* = *|a|+|b|*. Если *x* > *a*, имеем *|x+a|+|x+b|* > *x+b* > *a|+|b|*.

**8.** *Дан треугольник ABC. Известно, что B = 3C. На стороне AC отмечены такие точки M и N, что ABM = MBN = NBC. Перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BN, пересекает отрезок BM в точке K. Докажите, что NK биссектриса угла ANB.*

**Решение**. Пусть *C* = . Тогда *ANB* = *C*+*NBC* = 2 = *ABN*. Значит, *AK* биссектриса угла *A*. Кроме того, *BM* биссектриса угла *ABN*. Значит, *K* точка пересечения биссектрис треугольника *ABN*. из чего и следует утверждение задачи.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, третья лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Дан квадрат с нечетной стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать одну клетку таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 14.*

**Решение**. У квадрата со стороной 4*n*+1 достаточно вырезать угловую клетку: оставшуюся часть можно разрезать на квадрат со стороной 4*n* и две полоски 14*n*, которые без труда режутся на прямоугольники 14. В квадрате со стороной 4*n*+3 выделим угловой квадрат 77 и вырежем в нем центральную клетку. Оставшуюся часть квадрата 77 нетрудно разрезать на четыре прямоугольника 43, а оставшаяся часть квадрата со стороной 4*n*+3 режется на квадрат со стороной 4*n*4 и два прямоугольника 7(4*n*4), легко режущиеся на прямоугольники 14.

 Только случаи 4*k*+1 и 4*k*+2: *2 балла*.

**2.** *У Павиана и Бабуина есть 2016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан и съедает любое число бананов. Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 1017 бананов. Может ли Павиан этого добиться?*

**Ответ**. Может. **Решение**. Первым ходом Павиан съедает один банан. Бабуин вынужден съесть 2 банана. Затем Павиан снова ест один банан и т.д. После каждой пары таких ходов число бананов уменьшается на 3, и после 333-го хода Бабуина останется 2016999 = 1017 бананов.

**3.** *Кирилл написал на заборе в строчку число 21 ровно 100 раз. Докажите, что полученное число 212121…21 не является точным квадратом.*

**Решение**. Так как сумма цифр этого числа равна 300, оно делится на 3 и не делится на 9.

**4.** *Незнайка похвастался, что смог составить четыре натуральных числа, первое из которых делится на 36, второе на 37, третье на 38, а четвёртое на 39. При этом цифра 0 в записи чисел не содержится, а цифры 1, 2, …, 9 использованы ровно по одному разу. Не ошибся ли он?*

**Ответ**. Ошибся. **Решение**. Так как всего в этих четырёх числах 9 цифр, три из этих чисел должны быть двухзначными. Каждое из этих трёх равно либо одному из чисел 36, 37, 38, 39, либо одному из чисел 72, 74, 76, 78. Но тогда среди них найдутся два, начинающиеся на одну и ту же цифру.

**5.** *В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно двух общих знакомых. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?*

**Ответ**. 6. **Решение**. *Пример*. Вершины и рёбра октаэдра. *Оценка*. Очевидно, что людей в группе не меньше пяти. Но если их ровно пять и каждый знает четверых, то каждый знает каждого, и у каждых двоих три общих знакомых.

 Только оценка или только пример: *4 балла*.

**6.** *Учитель написал на доске обыкновенную дробь. Сначала к доске вышла Аня и прибавила к её знаменателю числитель. Затем к доске вышел Боря и к числителю новой дроби прибавил её знаменатель. Наконец, к доске вышел Вася и снова прибавил к знаменателю новой дроби её числитель. В итоге оказалось, что на доске написано* *. Какая дробь была на доске изначально?*

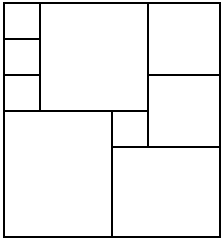
**Ответ**. 3/7. **Решение**. Пусть на доске была дробь *a*/*b*. Нетрудно проверить, что в итоге получилась дробь (2*a*+*b*)/(3*a*+2*b*). Решая систему уравнений 2*a*+*b* = 13, 3*a*+2*b* = 23, получаем *a* = 3, *b* = 7.

 Только ответ с проверкой без доказательства единственности: *2 балла*.

**7.** *Три школьника зашли в магазин. Алина купила 2 яблока, 7 груш и 1 апельсин, Вова 5 яблок, 6 груш и 5 апельсинов, Дима 8 яблок, 4 груши и 9 апельсинов. Все заплатили поровну, но один при оплате воспользовался скидкой. Кто?*

**Ответ**. Вова. **Решение**. Алина и Дима вместе купили 10 яблок, 11 груш и 10 апельсинов. Удвоенная покупка Вовы составляет 10 яблок, 12 груш и 10 апельсинов. Получается, что если удвоить покупку Вовы, она обойдётся ему в ту же сумму, что и меньшая на одну грушу покупка Алины и Димы. Значит, скидку получил Вова.

**8.** *Квадрат разбит на 9 частей, как показано на рисунке (рисунок может быть немного неточным, но схема разбиения именно такая). Могут ли все 9 частей быть квадратами?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Пусть стороны трёх равных квадратов вверху слева равны *a*, сторона квадрата в левом нижнем углу *b*, сторона квадрата в правом нижнем углу *c*, стороны двух равных квадратов вверху справа *d*. Сравнивая левую и нижнюю стороны большого квадрата, находим, что *c* = 3*a*. Сторона среднего из квадратов, примыкающих к верхней стороне большого квадрата, также равна 3*a*. Сравнивая теперь верхнюю и правую стороны большого квадрата, получаем: *a*+3*a*+*d* = *c*+2*d* = 3*a*+2*d*, откуда *a* = *d*. Но по рисунку 2*d* > 3*a* противоречие.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», высшая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

**1.** *В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?*

**Ответ**. 9. **Решение**. *Оценка*. Взяв общего знакомого двух знакомых, получим треугольник. У каждого из этих троих есть ещё по два знакомых, незнакомых с двумя остальными, что и даёт оценку. *Пример*. 9 человек, пронумерованных от 1 до 9, и такие треугольники знакомств: 123, 145, 267, 389, 468, 579.

 Только оценка или только пример: *4 балла*.

**2.** *Набор гирь будем называть* ***крепким****, если из этого набора можно удалить гирю так, чтобы средний вес оставшихся гирь не изменился. Есть набор из n > 2 гирь. Докажите, что если после удаления любой из гирь этот набор становится крепким, то он изначально крепкий.* *Средний вес гирь набора это сумма весов всех гирь набора, делённая на количество гирь в наборе.*

**Решение**. Разобьём набора гири на группы гирь равного веса так, чтобы гири из разных групп весили по-разному. Группы упорядочим по весу: *m*1 < *m*2 < … < *mk*. Удалим гирю весом *mi*. Тогда среди оставшихся найдется гиря, вес *Mi* которой равен среднему весу оставшихся гирь. Заметим, что *M*1 > *M*2 > … *Mk*. Поэтому *M*1 = *mk*, *M*2 = *mk*1 и т.д. Получается, что вес самой тяжёлой гири равен среднему весу всех гирь, не считая одной из гирь весом *m*1, откуда следует, что все они, кроме, может быть, *m*1, равны по весу. Аналогично можно доказать, что все гири, кроме, может быть, *mk*, равны по весу. Так как в наборе больше двух гирь, из этого следует, что все гири равны по весу, а такой набор, очевидно, является крепким.

**3.** *Дан квадрат со стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать не более 4 клеток таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 14.*

**Решение**. Рассмотрим несколько случаев. Если сторона квадрата делится на 4, все очевидно. *Если сторона квадрата равна 4k+2*, вырежем угловой квадрат 22. Оставшуюся часть квадрата можно разрезать на два прямоугольника 24*k* и квадрат со стороной 4*k*, которые в свою очередь очевидным образом режутся на прямоугольники 14. У *квадрата со стороной 4k+1* достаточно вырезать угловую клетку: оставшуюся часть можно разрезать на квадрат со стороной 4*k* и две полоски 14*k*, которые без труда режутся на прямоугольники 14. В *квадрате со стороной 4k+3* выделим угловой квадрат 77 и вырежем в нем центральную клетку. Оставшуюся часть квадрата 77 нетрудно разрезать на четыре прямоугольника 43, а оставшаяся часть квадрата со стороной 4*k*+3 режется на квадрат со стороной 4*k*4 и два прямоугольника 7(4*k*4), легко режущиеся на прямоугольники 14.

 Разобран только случай чётной стороны: *2 балла*. Разобран только случай стороны длины 4*k*+1: *2 балла*. Эти баллы суммируются.

**4.** *Дано натуральное число A, в записи которого нет нулей и девяток и которое состоит из чётного числа цифр. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число B. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число C. Оказалось, что A+B = C. Докажите, что у числа A найдутся две цифры (возможно, равные), сумма которых равна 8.*

**Решение**. Пусть в числах *A*, *B* и *C* по 2*k* цифр. Нетрудно проверить, что *k*  2. Заметим, что *CB* = *A*. Запишем это вычитание «в столбик». Понятно, что в каждом из последних *k* разрядов цифра уменьшаемого не меньше цифры вычитаемого. Равны они быть не могут, потому что иначе в этом разряде разности будет 0 или 9. Поэтому в каждом из этих мы будем «занимать» единицу из предыдущего разряда. Пусть в *k*-ом и (*k*+1)-ом (с начала) разрядах числа *C* стоят цифры *a* и *b* соответственно. Тогда в *k*-ом и (*k*+1)-ом (с начала) разрядах числа *B* стоят цифры *b* и *a* соответственно. При вычитании цифр в (*k*+1)-ом разряде, в (*k*+1)-ом разряде разности получится (с учётом предыдущего переноса)цифра *ba*+9, а при вычитании цифр в *k*-ом разряде в *k*-ом разряде разности получится цифра *b*1*a*. Сумма этих двух цифр равна 8.

**5.** *Петя, Вася и Толя пошли в магазин. Петя купил 6 груш, апельсин и 2 лимона. Вася купил 2 груши, 4 апельсина и 4 лимона. Наконец, Толя купил 5 груш, 2 апельсина и 3 лимона. При этом одному из мальчиков при покупке сделали скидку. В результате оказалось, что все мальчики заплатили поровну. Кому из мальчиков сделали скидку?*

**Ответ**. Толе. **Решение**. Удвоим покупку Пети и прибавим к ней покупку Васи. Получим 14 груш, 6 апельсинов и 8 лимонов. А в утроенной покупке Толи 15 груш, 6 апельсинов и 9 лимонов. За такие «большие покупки» Петя с Васей и Толя заплатили бы поровну. Но в большой покупке Толи апельсинов столько же, в большой покупке Пети с Васей, а груш больше и лимонов тоже. Значит, Толина большая покупка стоит дороже, то есть ему сделали скидку.

**6.** *Кирилл написал на заборе в строчку число 721 ровно 721 раз. Докажите, что полученное число 721721721…721 не является квадратом натурального числа.*

**Решение**. 721…721 = 71031001001…1001, где в последнем сомножителе 721 единица. Заметим, что число 1001001…1001 = 107203+1001(107183+107163+…+1) не делится на 7, так как 1001 делится на 7, а 107203 нет. Значит, число из условия задачи делится на 7, но не делится на 72.

**7.** *У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить?*

**Ответ**. Может. **Решение**. Первым ходом Павиан съедает один банан. Бабуин вынужден съесть 2 банана. Затем Павиан снова ест один банан и т.д., пока после очередного хода Бабуина не останется 2023 банана. Это случится, потому что 30162023 = 993 делится на 3. Тогда Павиан следующим ходом съедает 3 банана. Бабуин не может после этого съесть 4 банана, потому что тогда останется 2016 бананов. Поэтому он вынужден съесть 2 банана. После этого Павиан возвращается к прежней схеме, когда он своим ходом съедает 1 банан, а Бабуин вынужден каждым ходом съедать по 2 банана. Так как 20181016 = 1002 делится на 3, через 1002/3 = 334 пары таких ходов после хода Бабуина останется ровно 1016 бананов.

**8.** *В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад.*

**Решение**. Возьмём любую олимпиаду *O*. Для каждой их оставшихся 43 олимпиад один из семи победителей олимпиады *O* стал и её победителем. Значит, среди победителей олимпиады *O* был такой победитель *П*, который стал победителем еще по крайней мере семи олимпиад *O*1, …, *O*7. Допустим, если олимпиада *O*8, где *П* не был победителем. Тогда для каждой из олимпиад *O*, *O*1, …, *O*7 один из семи победителей олимпиады *O*8 был и её победителем. Но тогда один из победителей олимпиады *O*8 был, наряду с *П*, победителем каких-то двух из олимпиад *O*, *O*1, …, *O*7, что противоречит условию задачи.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», первая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

**1.** *В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?*

**Ответ**. 9. **Решение**. *Оценка*. Взяв общего знакомого двух знакомых, получим треугольник. У каждого из этих троих есть ещё по два знакомых, незнакомых с двумя остальными, что и даёт оценку. *Пример*. 9 человек, пронумерованных от 1 до 9, и такие треугольники знакомств: 123, 145, 267, 389, 468, 579.

 Только оценка или только пример: *4 балла*.

**2.** *Есть набор из n > 2 гирь попарно различных весов. Докажите, что из него можно удалить одну гирю так, чтобы в полученном наборе ни одна гиря не совпадала по весу со средним весом всех остальных. Средний вес набора гирь это сумма их весов, делённая на их количество.*

**Решение**. Допустим, после удаления каждой из гирь среди оставшихся есть гиря, средний вес которой совпадает со средним весом всех остальных. Упорядочим гири по весу: *m*1 < *m*2 < … < *mn*. Удалим гирю весом *mi*. Тогда среди оставшихся найдется гиря, вес *Mi* которой равен среднему весу оставшихся гирь. Заметим, что *M*1 > *M*2 > … *Mn*. Поэтому *M*1 = *mn*, *M*2 = *mn*1 и т.д. Получается, что вес самой тяжёлой гири равен среднему весу всех гирь, не считая одной из гирь весом *m*1, откуда следует, что все они, кроме, может быть, *m*1, равны по весу, что противоречит условию задачи.

**3.** *Дан квадрат со стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать не более 4 клеток таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 14.*

**Решение**. Рассмотрим несколько случаев. Если сторона квадрата делится на 4, все очевидно. *Если сторона квадрата равна 4k+2*, вырежем угловой квадрат 22. Оставшуюся часть квадрата можно разрезать на два прямоугольника 24*k* и квадрат со стороной 4*k*, которые в свою очередь очевидным образом режутся на прямоугольники 14. У *квадрата со стороной 4k+1* достаточно вырезать угловую клетку: оставшуюся часть можно разрезать на квадрат со стороной 4*k* и две полоски 14*k*, которые без труда режутся на прямоугольники 14. В *квадрате со стороной 4k+3* выделим угловой квадрат 77 и вырежем в нем центральную клетку. Оставшуюся часть квадрата 77 нетрудно разрезать на четыре прямоугольника 43, а оставшаяся часть квадрата со стороной 4*k*+3 режется на квадрат со стороной 4*k*4 и два прямоугольника 7(4*k*4), легко режущиеся на прямоугольники 14.

 Разобран только случай чётной стороны: *2 балла*. Разобран только случай стороны длины 4*k*+1: *2 балла*. Эти баллы суммируются.

**4.** *Дано натуральное число A, в записи которого нет нулей и девяток и которое состоит из чётного числа цифр. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число B. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число C. Оказалось, что A+B = C. Докажите, что у числа A найдутся две цифры (возможно, равные), сумма которых равна 8.*

**Решение**. Пусть в числах *A*, *B* и *C* по 2*k* цифр. Нетрудно проверить, что *k*  2. Заметим, что *CB* = *A*. Запишем это вычитание «в столбик». Понятно, что в каждом из последних *k* разрядов цифра уменьшаемого не меньше цифры вычитаемого. Равны они быть не могут, потому что иначе в этом разряде разности будет 0 или 9. Поэтому в каждом из этих мы будем «занимать» единицу из предыдущего разряда. Пусть в *k*-ом и (*k*+1)-ом (с начала) разрядах числа *C* стоят цифры *a* и *b* соответственно. Тогда в *k*-ом и (*k*+1)-ом (с начала) разрядах числа *B* стоят цифры *b* и *a* соответственно. При вычитании цифр в (*k*+1)-ом разряде, в (*k*+1)-ом разряде разности получится (с учётом предыдущего переноса)цифра *ba*+9, а при вычитании цифр в *k*-ом разряде в *k*-ом разряде разности получится цифра *b*1*a*. Сумма этих двух цифр равна 8.

**5**.**.** *Три школьника зашли в магазин. Алина купила 2 яблока, 7 груш и 1 апельсин, Вова 5 яблок, 6 груш и 5 апельсинов, Дима 8 яблок, 4 груши и 9 апельсинов. Все заплатили поровну, но один при оплате воспользовался скидкой. Кто?*

**Ответ**. Вова. **Решение**. Алина и Дима вместе купили 10 яблок, 11 груш и 10 апельсинов. Удвоенная покупка Вовы составляет 10 яблок, 12 груш и 10 апельсинов. Получается, что если удвоить покупку Вовы, она обойдётся ему в ту же сумму, что и меньшая на одну грушу покупка Алины и Димы. Значит, скидку получил Вова.

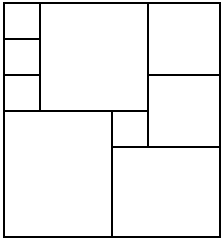
**6.** *Кирилл написал на заборе в строчку число 721 ровно 721 раз. Докажите, что полученное число 721721721…721 не является квадратом натурального числа.*

**Решение**. 721…721 = 71031001001…1001, где в последнем сомножителе 721 единица. Заметим, что число 1001001…1001 = 107203+1001(107183+107163+…+1) не делится на 7, так как 1001 делится на 7, а 107203 нет. Значит, число из условия задачи делится на 7, но не делится на 72.

**7.** *У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить?*

**Ответ**. Может. **Решение**. Первым ходом Павиан съедает один банан. Бабуин вынужден съесть 2 банана. Затем Павиан снова ест один банан и т.д., пока после очередного хода Бабуина не останется 2023 банана. Это случится, потому что 30162023 = 993 делится на 3. Тогда Павиан следующим ходом съедает 3 банана. Бабуин не может после этого съесть 4 банана, потому что тогда останется 2016 бананов. Поэтому он вынужден съесть 2 банана. После этого Павиан возвращается к прежней схеме, когда он своим ходом съедает 1 банан, а Бабуин вынужден каждым ходом съедать по 2 банана. Так как 20181016 = 1002 делится на 3, через 1002/3 = 334 пары таких ходов после хода Бабуина останется ровно 1016 бананов.

**8.** *Квадрат разбит на 9 частей, как показано на рисунке (рисунок может быть немного неточным, но схема разбиения именно такая). Могут ли все 9 частей быть квадратами?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Пусть стороны трёх равных квадратов вверху слева равны *a*, сторона квадрата в левом нижнем углу *b*, сторона квадрата в правом нижнем углу *c*, стороны двух равных квадратов вверху справа *d*. Сравнивая левую и нижнюю стороны большого квадрата, находим, что *c* = 3*a*. Сторона среднего из квадратов, примыкающих к верхней стороне большого квадрата, также равна 3*a*. Сравнивая теперь верхнюю и правую стороны большого квадрата, получаем: *a*+3*a*+*d* = *c*+2*d* = 3*a*+2*d*, откуда *a* = *d*. Но по рисунку 2*d* > 3*a* противоречие.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», вторая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

**1.** *В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно двух общих знакомых. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?*

**Ответ**. 6. **Решение**. *Пример*. Вершины и рёбра октаэдра. *Оценка*. Очевидно, что людей в группе не меньше пяти. Но если их ровно пять и каждый знает четверых, то каждый знает каждого, и у каждых двоих три общих знакомых.

 Только оценка или только пример: *4 балла*.

**2.** *Учитель написал на доске обыкновенную дробь. Сначала к доске вышла Аня и прибавила к её знаменателю числитель. Затем к доске вышел Боря и к числителю новой дроби прибавил её знаменатель. Наконец, к доске вышел Вася и снова прибавил к знаменателю новой дроби её числитель. В итоге оказалось, что на доске написано* *. Какая дробь была на доске изначально?*

**Ответ**. 3/7. **Решение**. Пусть на доске была дробь *a*/*b*. Нетрудно проверить, что в итоге получилась дробь (2*a*+*b*)/(3*a*+2*b*). Решая систему уравнений 2*a*+*b* = 13, 3*a*+2*b* = 23, получаем *a* = 3, *b* = 7.

 Только ответ с проверкой: *4 балла*.

**3.** *Дан квадрат с нечетной стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать одну клетку таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 14.*

**Решение**. У квадрата со стороной 4*n*+1 достаточно вырезать угловую клетку: оставшуюся часть можно разрезать на квадрат со стороной 4*n* и две полоски 14*n*, которые без труда режутся на прямоугольники 14. В квадрате со стороной 4*n*+3 выделим угловой квадрат 77 и вырежем в нем центральную клетку. Оставшуюся часть квадрата 77 нетрудно разрезать на четыре прямоугольника 43, а оставшаяся часть квадрата со стороной 4*n*+3 режется на квадрат со стороной 4*n*4 и два прямоугольника 7(4*n*4), легко режущиеся на прямоугольники 14.

 Только один из двух случаев: *4 балла*.

**4.** *Дано четырёхзначное число A, в записи которого нет нулей и девяток. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число B. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число C. Могло ли оказаться, что CB = A?*

**Ответ**. Могло. **Решение**. Например, подходит число 6174.

**5.** *У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить?*

**Ответ**. Может. **Решение**. Первым ходом Павиан съедает один банан. Бабуин вынужден съесть 2 банана. Затем Павиан снова ест один банан и т.д., пока после очередного хода Бабуина не останется 2023 банана. Это случится, потому что 30162023 = 993 делится на 3. Тогда Павиан следующим ходом съедает 3 банана. Бабуин не может после этого съесть 4 банана, потому что тогда останется 2016 бананов. Поэтому он вынужден съесть 2 банана. После этого Павиан возвращается к прежней схеме, когда он своим ходом съедает 1 банан, а Бабуин вынужден каждым ходом съедать по 2 банана. Так как 20181016 = 1002 делится на 3, через 1002/3 = 334 пары таких ходов после хода Бабуина останется ровно 1016 бананов.

**6.** *Кирилл написал на заборе в строчку число 24 ровно 300 раз. Докажите, что полученное число 242424…24 не является точным квадратом.*

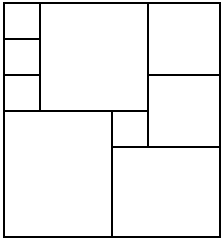
**Решение**. Это число делится на 8, но не делится на 16.

**7.** *Три школьника зашли в магазин. Алина купила 2 яблока, 7 груш и 1 апельсин, Вова 5 яблок, 6 груш и 5 апельсинов, Дима 8 яблок, 4 груши и 9 апельсинов. Все заплатили поровну, но один при оплате воспользовался скидкой. Кто?*

**Ответ**. Вова. **Решение**. Алина и Дима вместе купили 10 яблок, 11 груш и 10 апельсинов. Удвоенная покупка Вовы составляет 10 яблок, 12 груш и 10 апельсинов. Получается, что если удвоить покупку Вовы, она обойдётся ему в ту же сумму, что и меньшая на одну грушу покупка Алины и Димы. Значит, скидку получил Вова.

 Только ответ: *0 баллов*.

**8.** *Квадрат разбит на 9 частей, как показано на рисунке (рисунок может быть немного неточным, но схема разбиения именно такая). Могут ли все 9 частей быть квадратами?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Пусть стороны трёх равных квадратов вверху слева равны *a*, сторона квадрата в левом нижнем углу *b*, сторона квадрата в правом нижнем углу *c*, стороны двух равных квадратов вверху справа *d*. Сравнивая левую и нижнюю стороны большого квадрата, находим, что *c* = 3*a*. Сторона среднего из квадратов, примыкающих к верхней стороне большого квадрата, также равна 3*a*. Сравнивая теперь верхнюю и правую стороны большого квадрата, получаем: *a*+3*a*+*d* = *c*+2*d* = 3*a*+2*d*, откуда *a* = *d*. Но по рисунку 2*d* > 3*a* противоречие.

 Только ответ: *0 баллов*.